

TD4. Polynômes et fractions rationnelles.**Exercice 1.**

- (1) Sachant que le reste de la division euclidienne d'un polynôme $P(X)$ par $X - a$ est 1 et celui de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - b$ est -1 , avec $a \neq b$, quel est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$?
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.
- (3) Pour $n \geq 2$, donner le reste puis le quotient de la division euclidienne de $X^n + (X - 1)^n + 1$ par $X^2 - X$.

Exercice 2.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Calculer $(X^5 + X + 1) \wedge (X^4 - 2X^3 - X + 2)$.
- (2) Montrer que $A(X) = X^4 + 1$ et $B(X) = X^3 - 1$ sont premiers entre eux et trouver $U(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $AU + BV = 1$.
- (3) Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si A, B, C sont premiers entre eux deux à deux, alors $AB + BC + CA$ et ABC sont premiers entre eux.
- (4) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dans $\mathbb{K}[X]$ définie par $P_0 = 1, P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.
 - (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 - P_n P_{n+2} = 1$.
 - (b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \wedge P_{n+1} = 1$.
- (5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X - 1)^2$ divise $\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2 X^{n-1}$.

Exercice 3.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Effectuer la DES dans $\mathbb{R}$ en faisant des divisions euclidiennes

$$F(X) = \frac{4X^6 - 2X^5 + 11X^4 - X^3 + 11X^2 + 2X + 3}{X(X^2 + 1)^3}$$

- (2) Effectuer la DES dans $\mathbb{R}$ en faisant un changement d'indéterminée $X = Y + 1$

$$G(X) = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X - 1)^4}$$

- (3) On pose $Q_0(X) = (X - 1)(X - 2)^2, Q_1(X) = X(X - 2)^2, Q_2(X) = X(X - 1)$. A l'aide de la DES de $\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}$, trouver des polynômes A_0, A_1, A_2 telque $A_0 Q_0 + A_1 Q_1 + A_2 Q_2 = 1$. Que peut-on en déduire sur Q_0, Q_1, Q_2 ?
- (4) Effectuer dans $\mathbb{R}(X)$ la DES de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^2}{(X^2 + 1)^n}$$

Exercice 4.

- (1) Soit $F(X) = \frac{N(X)}{D(X)}$ une fraction rationnelle non nulle écrite sous forme irréductible. Montrer que si a est un pôle simple de $F(X)$ alors $D'(a) \neq 0$ et que le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ dans la DES de $F(X)$ est $\frac{N(a)}{D'(a)}$.
- (2) Effectuer dans $\mathbb{C}(X)$ la DES de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{(X^n - 1)}, n \geq 2.$$

Exercice 5.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $X^4 + aX^2 + bX + c$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.
- (2) Effectuer la DES de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)(X-2)\cdots(X-n)}, n \in \mathbb{N}^*$$

- (3) Former la DES dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^8 - X^4 + 2}{(X^2 + X + 1)^3}$$